

Svečilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# DIPLOMSKI RAD

Mentor

Prof.dr.sc.Slobodan Janković

Karolina Krajček

Zagreb, 2007.

## SAŽETAK

U ovom je diplomskom radu pokušano doći do rezultata za normalnu silu i moment propinjanja kombinacije tijelo-krilo spajanjem dvije različite numeričke metode; Weissinger metode za krilo i metode izvora i dipola za tijelo. Razvijena metoda nazvana je vrtlog-izvor-dipol, ili skraćeno VID. Metodom se na temelju ispunjavanja rubnih uvjeta o nepropusnosti površine određuju intenziteti  $\Gamma$  vrtloga kojima se simulira postojanje krila, te izvora i dipola koji simuliraju pristinost tijela u struji zraka. Pomoću tako definiranog strujanja može se odrediti lokalna brzina optjecanja na površini kombinacije a zatim i raspored tlaka iz Bernoullijeve jednadžbe. Koeficijent normalne sile i momenta propinjanja određuje se na osnovi rasporeda koeficijenta tlaka po površini kombinacije. Proračun je napisan u programu Matlab a daje rezultate za određeni napadni kut. Program je testiran na modelu samog krila i modelu samog tijela a rješenja su uspoređena sa onima iz Weissinger metode i izvor – dipol metode za tijelo. Rezultat normalne sile i momenta propinjanja zadane kombinacije uspoređen je sa rezultatima numeričkih metoda za istu kombinaciju sa jedne AIAA radionice.

# SADRŽAJ

1. UVOD .....	1
2. MATEMATIČKI PROBLEM.....	2
2.1 Vrtlog-Izvor-Dipol (VID) metoda .....	2
2.1.1 Modeliranje krila pomoću $\Pi$ vrtloga u nestlačivoj struji zraka.....	2
2.1.2 Utjecaj stlačivosti na model krila .....	3
2.1.3 Modeliranje tijela pomoću izvora i dipola u stlačivoj struji zraka.....	3
2.2 Model kombinacije tijelo - krilo .....	4
2.2.1 Rubni uvjeti na kombinaciji.....	4
2.2.2 Normala u kontrolnim točkama .....	5
2.2.3 Određivanje induciranih brzina od $\Pi$ vrtloga.....	6
2.2.4 Određivanje induciranih brzina od izvora i dipola.....	7
2.2.5 Određivanje matrica uplivnih koeficijenta .....	9
2.2.6 Određivanje intenziteta $\Pi$ vrtloga, izvora i dipola .....	11
2.3 Koeficijent tlaka.....	12
2.4 Aerodinamički koeficijenti .....	14
3. PROGRAMI.....	15
3.1 Opis programa .....	15
3.2 Testiranje programa .....	17
4. OCJENA METODE .....	21
5. ZAKLJUČAK .....	22
LITERATURA.....	33

## POPIS SLIKA

Slika 2-1 Modeliranje krila pomoću mreže $\Pi$ vrtloga.....	3
Slika 2-2 Normala na element krila u kontrolnoj točki $C_k$ .....	5
Slika 2-3 Normala na površinu tijela.....	6
Slika 2-4 Brzina inducirana vrtložnom niti.....	7
Slika 2-5 Brzine poremećaja u cilindričnom koordinatnom sustavu .....	8
Slika 2-6 Shematski prikaz matrične jednadžbe 2.22.....	10
Slika 2-7 Shematski prikaz sinteze matrične jednadžbe 2.22 u jednadžbu 2.27.....	11
Slika 3-1 Kombinacija tijelo – krilo sa kontrolnim točkama.....	16
Slika 3-2 Krilo iz kombinacije tijelo-krilo diskretizirano po rasponu i tetivi.....	17
Slika 3-3 Raspored cirkulacije po rasponu krila prema Weissinger metodi.....	18
Slika 3-4 Raspored cirkulacije po rasponu krila prema VID metodi .....	18
Slika 3-5 Raspored intenziteta dipola po dužini tijela prema body_alfa.m.....	19
Slika 3-6 Raspored intenziteta dipola po dužini tijela prema VID metodi.....	19
Slika 3-7 Raspored intenziteta izvora po dužini tijela prema body_alfa.m.....	20
Slika 3-8 Raspored intenziteta izvora po dužini tijela prema VID metodi.....	20

## **POPIS TABLICA**

Tablica 3-1 .....	15
-------------------	----

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
<b>A</b>	m/s	matrica uplivnih koeficijenata izvora
$A_{k,i}$	m/s	opći član matrice <b>A</b>
$\vec{a}_{k,i}$	m/s	brzina inducirana jediničnim intenzitetom izvora
$b$	m	raspon krila
<b>B</b>	m/s	matrica uplivnih koeficijenata pi vrtloga
$B_{k,\ell}$	m/s	opći član matrice <b>B</b>
$\vec{b}_{k,\ell}$	m/s	brzina inducirana jediničnim intenzitetom pi vrtloga
$b_w$	m	raspon dva polukrila
$c$	m	tetiva profila
$c_A$	m	aerodinamička tetiva
$C_k$	-	kontrolna točka
$C_m$	-	koeficijent momenta propinjanja
$C_p$	-	koeficijent tlaka
$C_z$	-	koeficijent normalne sile
$d$	m	promjer tijela
<b>D</b>	m/s	matrica uplivnih koeficijenata dipola
$D_{k,i}$	m/s	opći član matrice <b>D</b>
$\vec{d}_{k,i}$	m/s	brzina inducirana jediničnim intenzitetom pi vrtloga
$dP$	m <sup>2</sup>	element površine kombinacije tijelo-krilo
$\vec{F}$	N	aerodinamička sila
<b>G</b>	m <sup>3</sup> /s	matrica izvora
$G_i$	m <sup>3</sup> /s	intenzitet izvora na mjestu $i$
<b>H</b>	m <sup>3</sup> /s	matrica dipola
$H_i$	m <sup>3</sup> /s	intenzitet dipola na mjestu $i$
$\ell_{ref}$	m	referentna dužina
$m$	-	broj segmenata po rasponu krila
$Ma_\infty$	-	Machov broj
$N$	-	broj kontrolnih točaka na tijelu
$n$	-	broj segmenata po tetivi profila
$\vec{n}_k$	m	normala u kontrolnoj točki $C_k$

$n_x$	m	projekcija normale na os $x$
$n_y$	m	projekcija normale na os $y$
$n_z$	m	projekcija normale na os $z$
$p$	Pa	tlak
$p_\infty$	Pa	tlak neporemećene struje zraka
$r$	m	radijus tijela
$\vec{r}_0$	m	vektor od točke 1 do točke 2 vezanog vrtloga
$\vec{r}_1$	m	vektor od točke 1 vezanog vrtloga do proizvoljne kontrolne točke $C_k$
$\vec{r}_2$	m	vektor od točke 2 vezanog vrtloga do proizvoljne kontrolne točke $C_k$
$S_{ref}$	m <sup>2</sup>	referentna površina
$\vec{t}$	m	tangenta
$\hat{u}$	m/s	poremećaj brzine u pravcu osi $x$
$u_\infty$	m	jedinični vektor u pravcu osi $x$
$V$	m/s	brzina optjecanja
$\mathbf{V}$	m/s	vektor neporemećenih brzina projiciranih na normalu u $C_k$
$\hat{v}$	m/s	poremećaj brzine u pravcu osi $y$
$V_\infty$	m/s	neporemećena brzina zraka
$\vec{V}_{ind}$	m/s	inducirana brzina
$\hat{w}$	m/s	poremećaj brzine u pravcu osi $z$
$x_v$	m	položaj napadne točke na $x$ osi
$\alpha$	rad	napadni kut
$\alpha_p$	rad	kut koji zatvara tangenta na srednjaku aeroprofila sa $x$ osi
$\beta$	rad	kut koji tangenta na krilo zatvara sa $y$ osi
$\varepsilon$	rad	kut koji pravac radijusa zatvara sa normalom
$\Gamma$	m <sup>2</sup> /s	matrica intenziteta potkovičastih vrtloga
$\gamma$	-	omjer specifičnih toplina pri stalnom tlaku i stalnom volumenu
$\Gamma_\ell$	m <sup>2</sup> /s	intenzitet cirkulacije na panelu $\ell$
$\rho_\infty$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća neporemećene struje zraka
$\tau_0$	N/m <sup>2</sup>	tangencijalni napon
$\vartheta$	rad	kut u cilindričnom koordinatnom sustavu $x, r, \vartheta$
$\hat{\phi}$	m <sup>2</sup> /s	potencijal poremećaja

Indeks		Opis indeksa
$A$	-	aerodinamička točka
$i$	-	segment na osi tijela
$ind$	-	inducirana brzina
$k$	-	kontrolna točka
$\ell$	-	panel
$m$	-	moment propinjanja
$p$	-	profil, tlak
$ref$	-	referentna veličina
$v$	-	napadna točka
$w$	-	veličina krila od dva polukrila
$x, y, z$	-	koordinate u kartezijevom koordinatnom sustavu
$0$	-	točka
$1$	-	točka
$2$	-	točka
$\infty$	-	veličina u beskonačnosti



Izjavljujem da je ovaj rad rezultat mog samostalnog rada.

Ovom prilikom htjela bih se zahvaliti svom mentoru prof.dr.sc. Slobodanu Jankoviću i dr.sc. Milanu Vrdoljaku na stručnoj pomoći i savjetima.

U Zagrebu, 28.06.2007.

# 1. UVOD

U okviru kolegija iz Aerodinamike I [1], optjecanje oko krila sa strijelom napadnog ruba rješeno je pomoću Weissinger metode, a optjecanje tijela u stlačivoj struji zraka numeričkom metodom kombinacije izvora i dipola. Ovaj diplomski rad pokušaj je spajanja te dvije metode na kombinaciji tijelo – krilo u dozvučnoj struji zraka. U dozvučnom strujanju se mora uzeti u obzir stlačivost zraka dok se viskoznost može zanemariti (nema graničnog sloja). To znači da ovom metodom nije moguće odrediti silu otpora. Strujanje oko kombinacije bit će rezultat međudjelovanja krila i tijela a pokazat će koliki utjecaj na koeficijent normalne sile ima krilo a koliki tijelo. Vrednovanje ove metode izvršeno je usporedbom dobivenih vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata sa rezultatima iz zračnog tunela i rezultatima dobivenim numeričkim metodama u sklopu jedne AIAA radionice [2].

## 2. MATEMATIČKI PROBLEM

### 2.1 Vrtlog-Izvor-Dipol (VID) metoda

Zadan je zadatak proračuna normalne sile i momenta propinjanja kombinacije tijelo-krilo tako da se krilo simulira  $\Pi$  vrtlozima raspoređenim po rasponu i srednjoj liniji profila, a tijelo, linijskim rasporedom točkastih izvora i dipola po osi simetrije tijela. Jakosti ovih singulariteta određuju se tako da se zadovolje rubni uvjeti da brzina optjecanja bude tangencijalna na površinu. Ova metoda nazvana je vrtlog-izvor-dipol ili skraćeno VID.

#### 2.1.1 Modeliranje krila pomoću $\Pi$ vrtloga u nestlačivoj struji zraka

Krilo u nestlačivoj struji zraka simulira se mrežom  $\Pi$  vrtloga. Krilo se najprije podijeli na  $m$  segmenata po rasponu i  $n$  segmenata po tetivi što čini ukupno  $m \times n$  panela. Paneli su smješteni na srednjoj površini krila koju čine srednjake aeroprofila po rasponu.

Svaki panel simulira se jednim  $\Pi$  vrtlogom intenziteta  $\Gamma_\ell$  čiji središnji dio leži na četvrtini tetive tog panela, dok bočni kraci slijede zakrivljenu putanju krila do izlaznog brida a zatim se paralelno sa x osi protežu do beskonačnosti kako bi se zadovoljili Helmholtzovi teoremi o vrtložnosti [1]. Da bi se odredili intenziteti  $\Pi$  vrtloga nužno je zadovoljiti rubne uvjete o nepropusnosti površine (brzina optjecanja mora biti tangencijalna na površinu krila). Rubni uvjeti zadovoljavaju se u kontrolnim točkama koje se postavljaju na  $3/4$  središnje tetive panela.

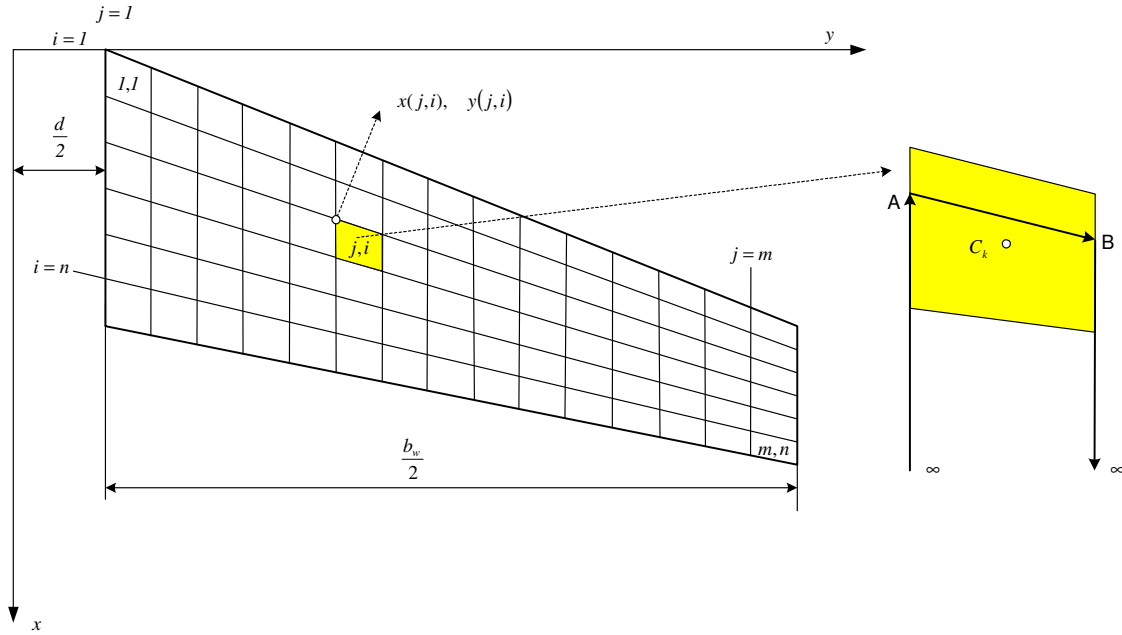
Dakle, krilo je simulirano sa ukupno  $m \times n$   $\Pi$  vrtloga intenziteta  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\ell, \dots, \Gamma_{mn}$ . Svaki od njih inducira brzinu  $(\vec{v}_{ind})_{k,\ell}$  u kontrolnoj točki  $C_k$  prema Biot-Savartovom zakonu [3] odnosno jednadžbi

$$(\vec{v}_{ind})_{k,\ell} = \vec{b}_{k,\ell} \Gamma_\ell \quad (2.1)$$

gdje vektor  $\vec{b}_{k,\ell}$  ovisi o geometriji " $\ell$ "-tog  $\Pi$  vrtloga i njegovoj udaljenosti od kontrolne točke  $C_k$  a jednak je brzini koju inducira vrtlog jediničnog intenziteta. Budući da je jednadžba 2.1 linearna, inducirane brzine svih  $m \times n$   $\Pi$  vrtloga mogu se zbrojiti kako bi se dobio izraz za ukupnu induciranu brzinu u kontrolnoj točki:

$$(\vec{v}_{ind})_k = \sum_{\ell=1}^{m \cdot n} \vec{b}_{k,\ell} \Gamma_\ell \quad (2.2)$$

Takva jednađba može se napisati za svaku kontrolnu točku, što znači  $m \times n$  jednađbi za  $m \times n$   $\Pi$  vrtloga.



Slika 2-1 Modeliranje krila pomoću mreže  $\Pi$  vrtloga

### 2.1.2 Utjecaj stlačivosti na model krila

Zadano krilo smješteno je u stlačivu struji zraka. Kako se prethodno opisan model krila može koristiti samo u nestlačivom strujanju potrebno prilikom izračunavanja koeficijenta tlaka izvršiti Prandtl-Glauertovu korekciju za stlačivost zraka prema [1].

### 2.1.3 Modeliranje tijela pomoću izvora i dipola u stlačivoj struji zraka

Tijelo rotacionog oblika u stlačivoj struji zraka pod napadnim kutom simulira se linijskim rasporedom točkastih izvora (ponora) i dipola po osi tijela. Potencijal poremećaja se može zadati kao zbroj potencijala izvora i potencijala dipola [1]:

$$\hat{\phi}(x, r, \vartheta) = \frac{G}{\left[ (x - \xi)^2 + (1 - Ma_\infty^2) r^2 \right]^{1/2}} + \frac{H r \cos \vartheta}{\left[ (x - \xi)^2 + (1 - Ma_\infty^2) r^2 \right]^{3/2}} \quad (2.3)$$

gdje je  $G$  intenzitet izvora (ponora) a  $H$  intenzitet dipola. Da bi se zadovoljili rubni uvjeti u više točaka, mora se uzeti zbroj potencijala izvora i dipola, raspoređenih po osi  $x$  u točkama  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N$ , intenziteta  $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_N$  za izvore i  $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_N$  za dipole. Tako će potencijal poremećaja brzina u točki  $x, r, \vartheta$  biti:

$$\hat{\phi}(x, r, \vartheta) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{G_i}{\left[ (x - \xi_i)^2 + (1 - Ma_\infty^2) r^2 \right]^{1/2}} + \frac{H_i r \cos \vartheta}{\left[ (x - \xi_i)^2 + (1 - Ma_\infty^2) r^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (2.4)$$

Potencijal poremećaja inducira brzinu  $\hat{V}$  u točki  $x, r, \vartheta$ . Komponente brzine poremećaja  $\hat{V}$ , dane su jednadžbama:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{x - \xi_i}{\rho_i^3} G_i - \frac{3(x - \xi_i)r \cos \vartheta}{\rho_i^5} H_i \right] \\ \hat{v} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{(1 - Ma_\infty^2)r}{\rho_i^3} G_i + \left[ \frac{\cos \vartheta}{\rho_i^3} - \frac{3(1 - Ma_\infty^2)r^2 \cos \vartheta}{\rho_i^5} \right] H_i \right\} \\ \hat{w} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \vartheta} = -\sum_{i=1}^N \frac{H_i \sin \vartheta}{\rho_i^3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdje je  $\rho_i = \sqrt{(x - \xi_i)^2 + (1 - Ma_\infty^2)r^2}$ .

## 2.2 Model kombinacije tijelo - krilo

### 2.2.1 Rubni uvjeti na kombinaciji

Kombinacija tijelo-krilo modelira se istodobnim zadovoljavanjem rubnih uvjeta na krilu i tijelu koji su simulirani na prethodno opisan način.

Rubni uvjeti zadovoljavaju se u kontrolnim točkama na krilu i tijelu. Na krilu su postavljene na  $\frac{3}{4}$  dužine središnje tetive panela što znači da je na krilu  $m \times n$  kontrolnih točaka. Na tijelu se uzima  $2N$  kontrolnih točaka i to  $N$  točaka sa gornje ( $\vartheta = 0$ ) i  $N$  točaka sa donje strane tijela ( $\vartheta = \pi$ ). Zbog simetrije tijela rubni će uvjet na tijelu biti ispunjen u svim točkama poprečnog presjeka.

Kako bi se zadovoljili rubni uvjeti na površini kombinacije, resultantna brzina optjecanja mora biti tangencijalna na površinu u svakoj od  $m \times n + 2N$  kontrolnih točaka.

Budući da je resultantna brzina optjecanja u svakoj točki jednaka zbroju induciranih brzina od svih vrtloga, svih izvora i svih dipola, rubni se uvjet u kontrolnoj točki  $C_k$  može zapisati kao:

$$\vec{n}_k \cdot \left[ \vec{V}_\infty + \sum_{\ell=1}^{m \times n} \vec{b}_{k,\ell} \cdot \Gamma_\ell + \sum_{i=1}^N (\vec{a}_{k,i} G_i + \vec{d}_{k,i} H_i) \right] = 0 \quad (2.6)$$

gdje:

$\vec{n}_k$  normala na površinu u kontrolnoj točki  $C_k$  (slika 2-2)

$\vec{b}_{k,\ell}$  inducirana brzina u kontrolnoj točki  $C_k$  od  $\Pi$  vrtloga jediničnog intenziteta na " $\ell$ " panelu krila

$\vec{a}_{k,i}$  inducirana brzina u kontrolnoj točki  $C_k$  od izvora jediničnog intenziteta na segmentu "i" osi tijela

$\vec{d}_{k,i}$  inducirana brzina u kontrolnoj točki  $C_k$  od dipola jediničnog intenziteta na segmentu "i" osi tijela.

### 2.2.2 Normala u kontrolnim točkama

Normala na površinu kombinacije tijelo – krilo u kontrolnim točkama određuje se

- za krilo:

$$(\mathbf{n}_k)_{krilo} = \begin{bmatrix} -\cos \beta \sin \alpha_{p_k} & -\sin \beta & \cos \beta \cos \alpha_{p_k} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

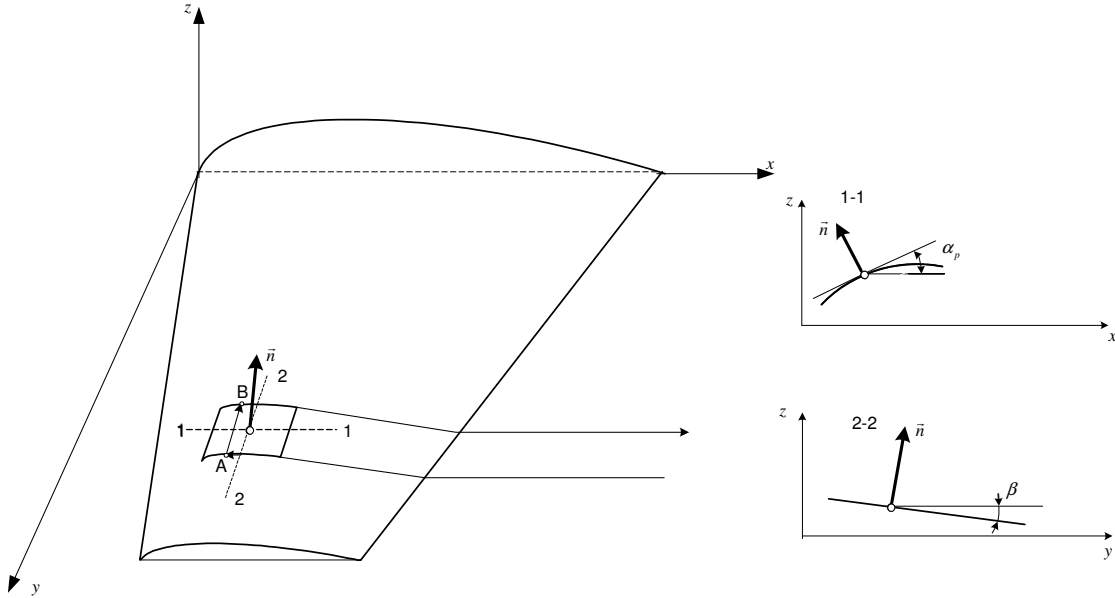
-za tijelo u točkama na gornjoj strani ( $\vartheta = 0$ ):

$$(\mathbf{n}_k)_{\vartheta=0} = \begin{bmatrix} -\sin \varepsilon_k & 0 & \cos \varepsilon_k \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

-za tijelo u točkama na donjoj strani ( $\vartheta = \pi$ ):

$$(\mathbf{n}_k)_{\vartheta=\pi} = \begin{bmatrix} -\sin \varepsilon_k & 0 & -\cos \varepsilon_k \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Oznake kutova definirane su na slikama 2-2 i 2-3



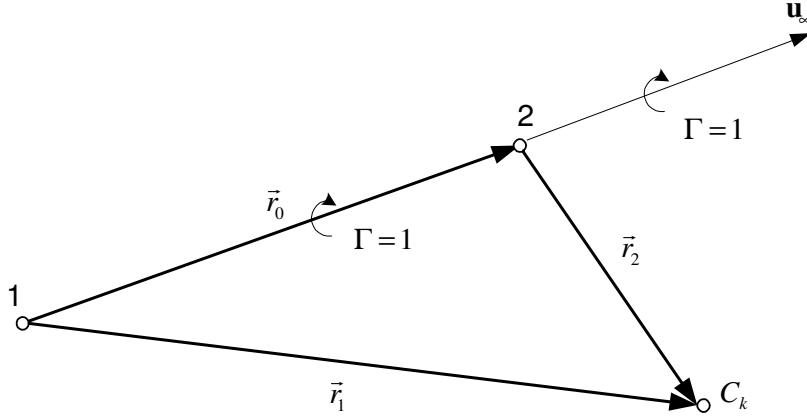
Slika 2-2 Normala na element krila u kontrolnoj točki  $C_k$



Da bi se odredila inducirana brzina od  $\Pi$  vrtloga  $\vec{b}_{k,\ell}$  koristi se Biot-Savartov zakon.

$$\vec{b}_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{(r_1 + r_2)(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{r_1 r_2 (r_1 r_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)} \quad (2.10)$$
$$\vec{b}_{2\infty} = \frac{1}{4\pi r_2} \frac{(\vec{u}_\infty \times \vec{r}_2)}{(r_2 - \vec{u}_\infty \cdot \vec{r}_2)} \quad (2.11)$$

Dakle, u kontrolnoj točki će svaki dio  $\Pi$  vrtloga inducirati brzinu koja se zatim zbraja da bi se dobila ukupna inducirana brzina  $\vec{b}_{k,\ell}$  u kontrolnoj točki  $C_k$  od  $\Pi$  vrtloga jediničnog intenziteta na panelu " $\ell$ ".



Slika 2-4 Brzina inducirana vrtložnom niti

## 2.2.4 Određivanje induciranih brzina od izvora i dipola

Potencijal poremećaja u kontrolnoj točki  $C_k$  od izvora i dipola jest:

$$\hat{\phi}(x_k, r_k, \vartheta_k) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{G_i}{\rho_{ik}} + \frac{H_i r_k \cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^3} \right) \quad (2.12)$$

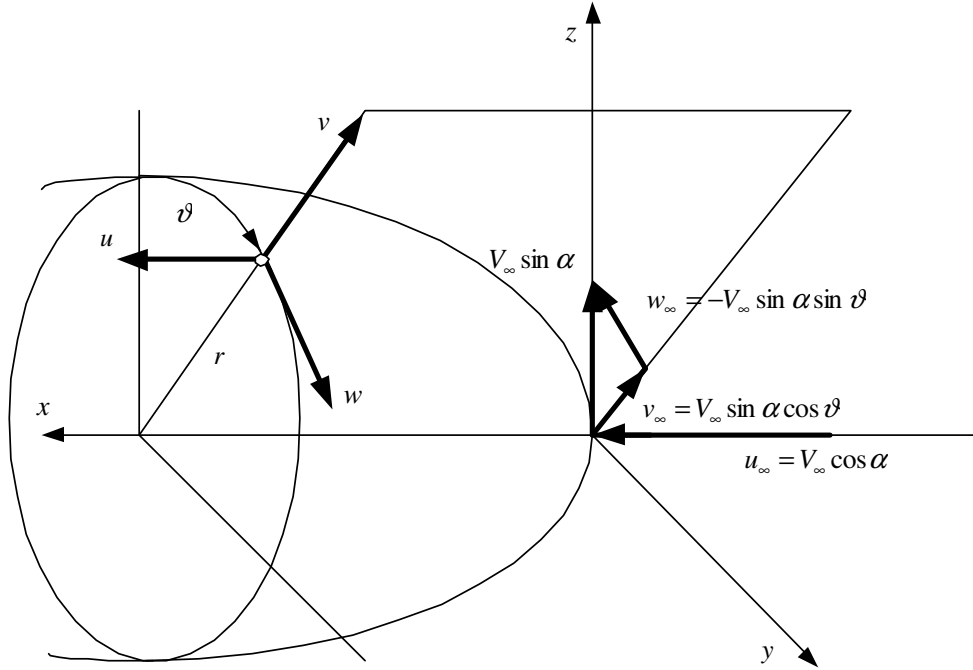
a poremećaji komponenata

$$\begin{aligned} \hat{u}_k &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{x_k - \xi_i}{\rho_{ik}^3} G_i - \frac{3(x_k - \xi_i) r_k \cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^5} H_i \right] \\ \hat{v}_k &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{(1 - Ma_\infty^2) r_k}{\rho_{ik}^3} G_i + \left[ \frac{\cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^3} - \frac{3(1 - Ma_\infty^2) r_k^2 \cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^5} \right] H_i \right\} \\ \hat{w}_k &= \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \vartheta} = -\sum_{i=1}^N \frac{H_i \sin \vartheta_k}{\rho_{ik}^3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdje

$$\rho_{ik} = \sqrt{(x_k - \xi_i)^2 + (1 - Ma_\infty^2)(y_k^2 + z_k^2)} \quad (2.14)$$





Slika 2-5 Brzine poremećaja u cilindričnom koordinatnom sustavu

Iz gornjih je jednadžbi vidljivo da su komponente vektora inducirane brzine u kontrolnoj točki  $C_k$  od jediničnih izvora  $\vec{a}_{k,i}$  jednake u sustavu  $x, r, \vartheta$

$$\mathbf{a}_{k,i}(x_k, r_k, \vartheta_k) = \begin{bmatrix} -\frac{x_k - \xi_i}{\rho_{ik}^3} & -\frac{(1 - Ma_\infty^2)r_k}{\rho_{ik}^3} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.15)$$

dok su komponente vektora inducirane brzine u  $C_k$  od jediničnih dipola  $\vec{d}_{k,i}$  jednake

$$\mathbf{d}_{k,i}(x_k, r_k, \vartheta_k) = \begin{bmatrix} -\frac{3(x_k - \xi_i)r_k \cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^5} & \frac{\cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^3} - \frac{3(1 - Ma_\infty^2)r_k^2 \cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^5} & -\frac{\sin \vartheta_k}{\rho_{ik}^3} \end{bmatrix}^T \quad (2.16)$$

Komponente brzina određene su u cilindričnom koordinatnom sustavu pa se moraju pomoću matrice transformacije prebaciti u kartezijski sustav. Sa slike 2-5 vidi se da je za to potrebno izvršiti rotaciju oko koordinatne osi  $x$  za kut  $\vartheta$ . Prilikom transformacije u kartezijski koordinatni sustav potrebno je zamijeniti mjesta brzinama poremećaja  $\hat{w}_{k,i}$  i  $\hat{v}_{k,i}$  jer se poremećaj  $\hat{w}_{k,i}$  poklapa sa osi  $y$  a  $\hat{v}_{k,i}$  sa osi  $z$ .

$$\mathbf{L}_x(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{a}_{k,i} = \left[ -\frac{x_k - \xi_i}{\rho_{ik}^3} \quad -\frac{(1 - Ma_\infty^2)r_k \sin \vartheta_k}{\rho_{ik}^3} \quad -\frac{(1 - Ma_\infty^2)r_k \cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^3} \right]^T \quad (2.18)$$

$$\mathbf{d}_{k,i} = \left[ -\frac{3(x_k - \xi_i)r_k \cos \vartheta_k}{\rho_{ik}^5} \quad -\frac{3(1 - Ma_\infty^2)r_k^2 \cos \vartheta_k \sin \vartheta_k}{\rho_{ik}^5} \quad \frac{1}{\rho_{ik}^3} - \frac{3(1 - Ma_\infty^2)r_k^2 \cos^2 \vartheta_k}{\rho_{ik}^5} \right]^T \quad (2.19)$$

## 2.2.5 Određivanje matrica uplivnih koeficijenta

Ako se u jednadžbi 2.6 inducirane brzine od jediničnih singulariteta pomnože sa normalom u kontrolnoj točki dobit će se jednadžba oblika

$$\sum_{\ell=1}^{m \times n} (\vec{n}_k \cdot \vec{b}_{k,\ell}) \Gamma_\ell + \sum_{i=1}^N (\vec{n}_k \cdot \vec{a}_{k,i}) G_i + \sum_{i=1}^N (\vec{n}_k \cdot \vec{d}_{k,i}) H_i = -\vec{n}_k \cdot \vec{V}_\infty \quad (2.20)$$

Skalarni umnožak normale u kontrolnoj točki sa brzinom induciranom od singulariteta jediničnog intenziteta predstavlja uplivni koeficijent tog singulariteta. Uplivni koeficijenti ovise isključivo o geometriji kombinacije i rasporedu singulariteta. Jednadžba 2.20 zapisana pomoću uplivnih bit će

$$\sum_{\ell=1}^{m \times n} B_{k,\ell} \Gamma_\ell + \sum_{i=1}^N A_{k,i} G_i + \sum_{i=1}^N D_{k,i} H_i = -V_k \quad (2.21)$$

gdje:

$B_{k,\ell}$  uplivni koeficijent  $\Pi$  vrtloga na panelu " $\ell$ " s obzirom na kontrolnu točku  $C_k$ ,

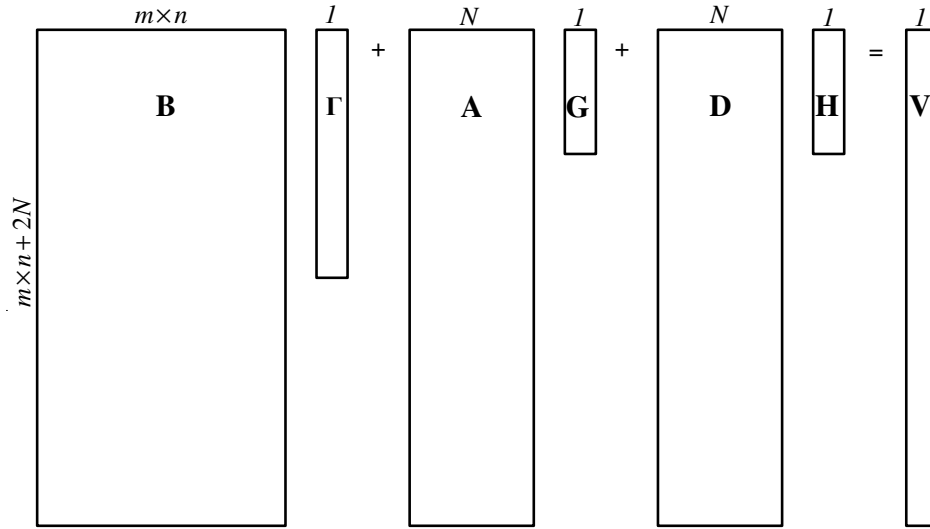
$A_{k,i}$  uplivni koeficijent izvora na segmentu " $i$ " s obzirom na kontrolnu točku  $C_k$  i

$D_{k,i}$  uplivni koeficijent dipola na segmentu " $i$ " s obzirom na kontrolnu točku  $C_k$ .

Kada se rubni uvjet iz jednadžbe 2.21 napiše za  $m \times n$  kontrolnih točaka na krilu i  $2N$  kontrolnih točaka na tijelu dobit će se  $m \times n + 2N$  linearnih jednadžbi u matričnom obliku

$$\mathbf{B}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{D}\mathbf{H} = \mathbf{V} \quad (2.22)$$

Matrice  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{D}$  predstavljaju matrice uplivnih koeficijenata pojedinih singulariteta u kontrolnim točkama. Matrica  $\mathbf{B}$  sastoji se od  $m \times n + 2N$  redaka koji predstavljaju kontrolne točke na kombinaciji i  $m \times n$  stupaca koji predstavljaju  $\Pi$  vrtloge.



Slika 2-6 Shematski prikaz matrice jednačbe 2.22

Opći član matrice **B**,  $B_{k,\ell}$ , jednak je skalarnom umnošku inducirane brzine od  $\Pi$  vrtloga jediničnog intenziteta na panelu " $\ell$ " i normale u kontrolnoj točki  $C_k$ :

$$B_{k,\ell} = \vec{n}_k \cdot \vec{b}_{k,\ell} \quad (2.23)$$

Opći član matrice **A**,  $A_{k,i}$ , uplivnog koeficijenta izvora na mjestu " $i$ " u kontrolnoj točki  $C_k$  jednak je skalarnom produktu inducirane brzine od izvora jediničnog intenziteta i normale u kontrolnoj točki:

$$A_{k,i} = \vec{n}_k \cdot \vec{a}_{k,i} \quad (2.24)$$

Isto tako je opći član matrice **D**,  $D_{k,i}$ , uplivnog koeficijenta dipola na mjestu " $i$ " u kontrolnoj točki  $C_k$ , jednak skalarnom produktu inducirane brzine od potencijala dipola jediničnog intenziteta i normale u kontrolnoj točki:

$$D_{k,i} = \vec{n}_k \cdot \vec{d}_{k,i} \quad (2.25)$$

Dok je opći član matrice **V** jednak skalarnom produktu vektora slobodne zračne struje  $\vec{V}_\infty$  pod napadnim kutom  $\alpha$  i normale u kontrolnoj točki  $C_k$ .

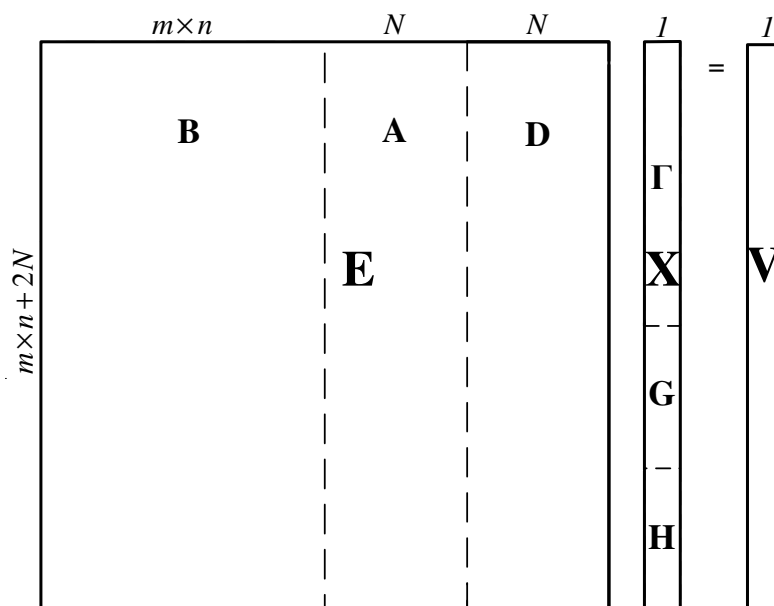
$$V_k = -\vec{n}_k \cdot \vec{V}_\infty \quad (2.26)$$

## 2.2.6 Određivanje intenziteta $\Pi$ vrtloga, izvora i dipola

Da bi se odredili intenziteti vrtloga  $\Gamma$ , izvora  $G$  i dipola  $H$  potrebno je matričnu jednadžbu 2.22 sintetizirati u jednu jednadžbu oblika

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{V} \quad (2.27)$$

Matrica  $\mathbf{E}$  sadržavat će matrice  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{D}$  a matrica  $\mathbf{X}$  nepoznate intenzitete  $\Pi$  vrtloga  $\Gamma$ , izvora  $G$  i dipola  $H$  prema slici 2-7.



Slika 2-7 Shematski prikaz sinteze matrične jednadžbe 2.22 u jednadžbu 2.27

Tako sintetizirana lijeva strana jednadžbe 2.22 postaje jednaka umnošku kvadratne matrice  $\mathbf{E}$  i matrice nepoznatih intenziteta  $\mathbf{X}$ . Rješenje tog sustava, elementi matrice intenziteta singulariteta  $\mathbf{X}$ , može naći ako jednadžbu 2.27 pomnožimo s lijeve strane sa inverznom matricom  $\mathbf{E}$ . Slijedi,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E}^{-1}) \cdot \mathbf{V} \quad (2.28)$$

Prvih  $m \times n$  elemenata matrice  $\mathbf{X}$  bit će intenziteti  $m \times n$   $\Pi$  vrtloga na krilu, zatim slijedi  $N$  elementa koji predstavljaju intenzitete izvora i  $N$  elemenata koji predstavljaju intenzitete dipola smještenih na osi simetrije tijela.

## 2.3 Koeficijent tlaka

Koeficijent tlaka kod strujanja stlačivog fluida određuje se prema jednadžbi iz [1]

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}} = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2} \left( \frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (2.29)$$

Da bi se odredio  $C_p$  potrebno je poznavati odnos tlaka u točki na površini prema tlaku u beskonačnosti. Taj se odnos određuje iz Saint Venanove jednadžbe i pomoću adijabatske jednadžbe iz [1].

$$\frac{p}{p_\infty} = \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} Ma_\infty^2 \frac{V^2 - V_\infty^2}{V_\infty^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.30)$$

gdje je  $V$  intenzitet vektora poremećene brzine  $\vec{V}$ .

Poremećena brzina u nekoj točki  $M_t$  jednaka je zbroju neporemećene brzine  $\vec{V}_\infty$  i poremećaja brzine u točki  $M_t$ .

$$\vec{V}_t = \vec{V}_\infty + \vec{\hat{V}}_t \quad (2.31)$$

Poremećaj brzine u točki  $M_t$  na površini kombinacije  $\vec{\hat{V}}_t$  jednak je zbroju induciranih brzina od vrtloga, izvora i dipola.

$$\vec{\hat{V}}_t = \sum_{\ell=1}^{m \times n} \vec{b}_{t,\ell} \Gamma_\ell + \sum_{i=1}^N \vec{a}_{t,i} G_i + \sum_{i=1}^N \vec{d}_{t,i} H_i \quad (2.32)$$

Vektori induciranih brzina od jediničnih vrtloga, izvora i dipola  $\vec{b}_{t,\ell}$ ,  $\vec{a}_{t,i}$  i  $\vec{d}_{t,i}$  u točki  $M_t$  izračunavaju se na način objašnjen u poglavljima 2.2.3 i 2.2.4. Dakle, jednadžba prema kojoj se određuje poremećena brzina u točki  $M_t$  je

$$\vec{V}_t = \vec{V}_\infty + \sum_{\ell=1}^{m \times n} \vec{b}_{t,\ell} \Gamma_\ell + \sum_{i=1}^N \vec{a}_{t,i} G_i + \sum_{i=1}^N \vec{d}_{t,i} H_i \quad (2.33)$$

Međutim, iako se zadana kombinacija nalazi u stlačivoj struji zraka, zbog simulacije krila  $\Pi$  vrtlozima (primjenjivi samo u nestlačivom strujanju) ne može se jednostavno primijeniti 2.29 jednadžba za koeficijent tlaka. Odnosno, potrebno je razlikovati poremećene brzine u stlačivom i nestlačivom strujanju.  $\Pi$  vrtlozi mogu dati samo poremećenu brzinu u nestlačivom strujanju pa se i koeficijent tlaka takve brzine mora odrediti prema jednadžbi za  $C_p$  u nestlačivom strujanju iz [1]

$$(C_{p_{nstl}})_{tijelo} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{2}} = 1 - \frac{V^2}{V_{\infty}^2} \quad (2.34)$$

Budući da je krilo aproksimirano srednjakom profila, koeficijent tlaka na njemu bit će razlika tlakova sa gornje i donje strane. Metodom VID određene su inducirane brzine samo sa gornje strane tankog krila pa se na krilu mora primijeniti jednadžba iz [1]

$$(C_{p_{nstl}})_{krilo} = \frac{2}{V_{\infty}} \frac{d\Gamma}{dx} \quad (2.35)$$

To znači da za točke na krilu prilikom računanja koeficijenta tlaka nisu u obzir uzete inducirane brzine od izvora i dipola na osi tijela. Tako dobiveni koeficijent tlaka se zatim uveća za faktor  $\frac{1}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}}$  (prema Prandtl-Glauertovom zakonu o utjecaju stlačivosti na koeficijent tlaka) da bi se dobio  $C_p$  u stlačivom optjecanju.

$$C_p = \frac{C_{p_{nstl}}}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \quad (2.36)$$

To znači, da se u točki  $M_t$  koeficijent tlaka  $C_p$  može zapisati kao zbroj dva koeficijenta tlaka pa slijedi

$$(C_p)_{tijelo} = \frac{2}{\gamma Ma_{\infty}^2} \left[ \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} Ma_{\infty}^2 \frac{V_{p_{stl}}^2 - V_{\infty}^2}{V_{\infty}^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] + (1 - Ma_{\infty}^2)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{V_{p_{nstl}}^2}{V_{\infty}^2} \right) \quad (2.37)$$

Prvi dio jednadžbe 2.37 je koeficijent tlaka zbog poremećene brzine strujanja u stlačivoj struji zraka koja se računa prema

$$\vec{V}_{p_{stl}} = \vec{V}_{\infty} + \sum_{i=1}^N \vec{a}_{t,i} G_i + \sum_{i=1}^N \vec{d}_{t,i} H_i \quad (2.38)$$

a drugi dio je koeficijent tlaka zbog poremećene brzine strujanja u nestlačivoj struji zraka

$$\vec{V}_{p_{nstl}} = \vec{V}_{\infty} + \sum_{\ell=1}^{m \times n} \vec{b}_{t,\ell} \Gamma_{\ell} \quad (2.39)$$

Koeficijent tlaka na krilu u stlačivom optjecanju računa se prema jednadžbi

$$(C_p)_{krilo} = \frac{2}{V_{\infty}} \frac{d\Gamma}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \quad (2.40)$$

## 2.4 Aerodinamički koeficijenti

Na element površine kombinacije tijelo-krilo djeluju dvije sile:

–  $p\vec{n}dP$ , uslijed normalnog tlaka

$\tau_0\vec{t}dP$ , sila trenja u tangencijalnoj ravnini u pravcu brzine optjecanja.

Budući da se u okviru ovog rada ne uzima u obzir postojanje graničnog sloja, zanemarit će se i sila uslijed tangencijalnog napona,  $\tau_0\vec{t}dP$ . Dakle, na element površine  $dP$  djelovat će samo elementarna sila uslijed normalnog tlaka  $-p\vec{n}dP$ . To znači da na cijelu vanjsku površinu kombinacije djeluje sila:

$$\vec{F} = \int_p -p\vec{n}dP \quad (2.41)$$

Normalna komponenta ove sile izražena u obliku koeficijenta  $C_z$  određuje se prema jednadžbi iz [1]

$$C_z = -\frac{1}{S_{ref}} \int_p C_p n_z dP \quad (2.42)$$

a moment propinjanja, u obliku koeficijenta  $C_m$ , koji aerodinamička sila  $\vec{F}$  radi s obzirom na zadanu napadnu točku  $x_v$  iz jednadžbe,

$$C_m = \frac{1}{S_{ref} \ell_{ref}} \int_p [(x - x_v)n_z - zn_x] \cdot C_p dP \quad (2.43)$$

Koeficijent tlaka na krilu kombinacije određuje se u točkama na četvrtini srednje tetive panela (koristi se ista diskretizacija kao i za modeliranje vrtloga). Tijelo je potrebno najprije diskretizirati na  $N$  panela duž osi  $x$  i  $M$  panela po kutu  $\vartheta$ , ukupno  $N \times M$  panela. Tlak se određuje u točki u težištu panela.

### 3. PROGRAMI

#### 3.1 Opis programa

Rješenje diplomskog zadatka dobiveno je pomoću programa napisanog u Matlab-u. Program je sastavljen pomoću dva već postojeća programa napravljena za potrebe predavanja iz Aerodinamike I: programa *Weissinger* koji računa uzgon krila pomoću cirkulacije i programa *body\_alfa* za proračun normalne sile i momenta propinjanja na osnosimetričnom tijelu. Oba programa nalaze se u prilogu na CD-u.

Program VID objedinjuje te dvije numeričke metode kako je već opisano u prethodnim poglavljima. U VID metodi zanemarena je debljina krila pa se u proračunu koristi samo srednjaka aeroprofila  $LS(1)-0417$  čije su koordinate preuzete iz literature [5]. Geometrija kombinacije tijelo-krilo zadana je sa krilom bez dihedrala i u osi simetrije tijela. Nosni dio tijela definiran je poluelipsoidom, središnji valjkom a završni tangencijalnim oživalom. Proračun je rađen za  $Ma = 0.75$  kako bi se rezultati mogli usporediti sa rezultatima AIAA radionice [2].

Glavni program VID može se podijeliti na četiri dijela:

- određivanje intenziteta  $\Pi$  vrtloga na krilu te izvora i dipola na tijelu
- računanje brzina poremećaja u odabranim točkama
- računanje koeficijenta tlaka  $C_p$  pomoću Bernoullieve jednačbe
- određivanje koeficijenta normalne sile  $C_z$  i momenta propinjanja  $C_m$  na temelju rasporeda tlaka

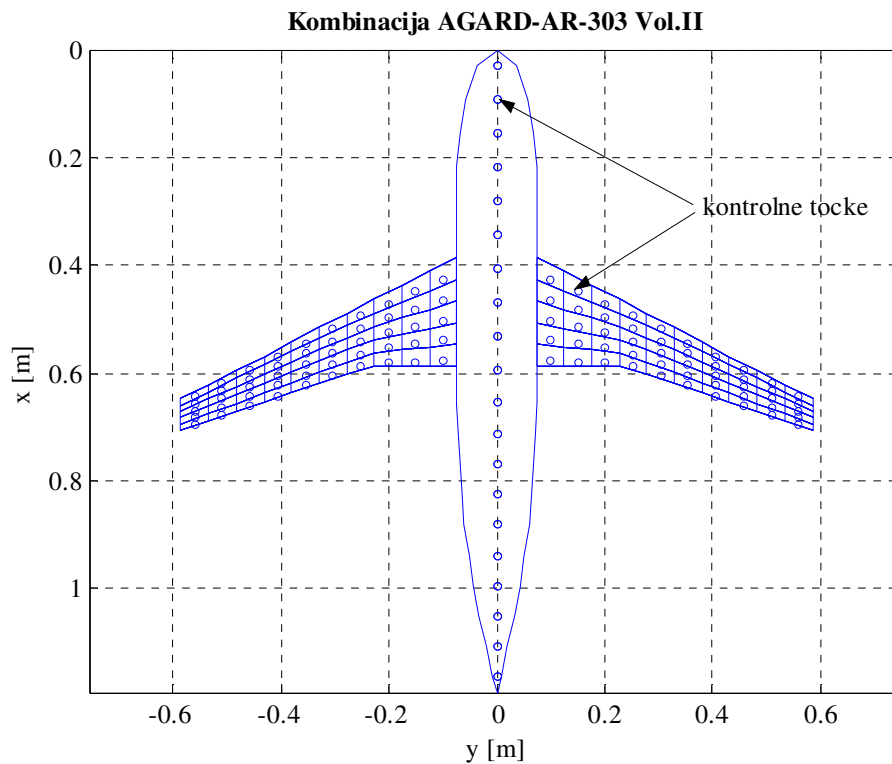
Program VID poziva niz potprograma nabrojanih i opisanih u tablici 3-1.

Tablica 3-1

Ime programa	Opis programa
aerokoef	računa koeficijente normalne sile i momenta propinjanja kombinacije tijelo – krilo na temelju rasporeda tlaka
bodynet	računa koordinate kontrolnih točaka tijela i normale u njima
crtanje	prikaz geometrije i rezultata
Fdipol	funkcija koja daje brzinu poremećaja u kontrolnoj točki od svih dipola jediničnog intenziteta
Fizvor	funkcija koja daje brzinu poremećaja u kontrolnoj točki od svih izvora jediničnog intenziteta



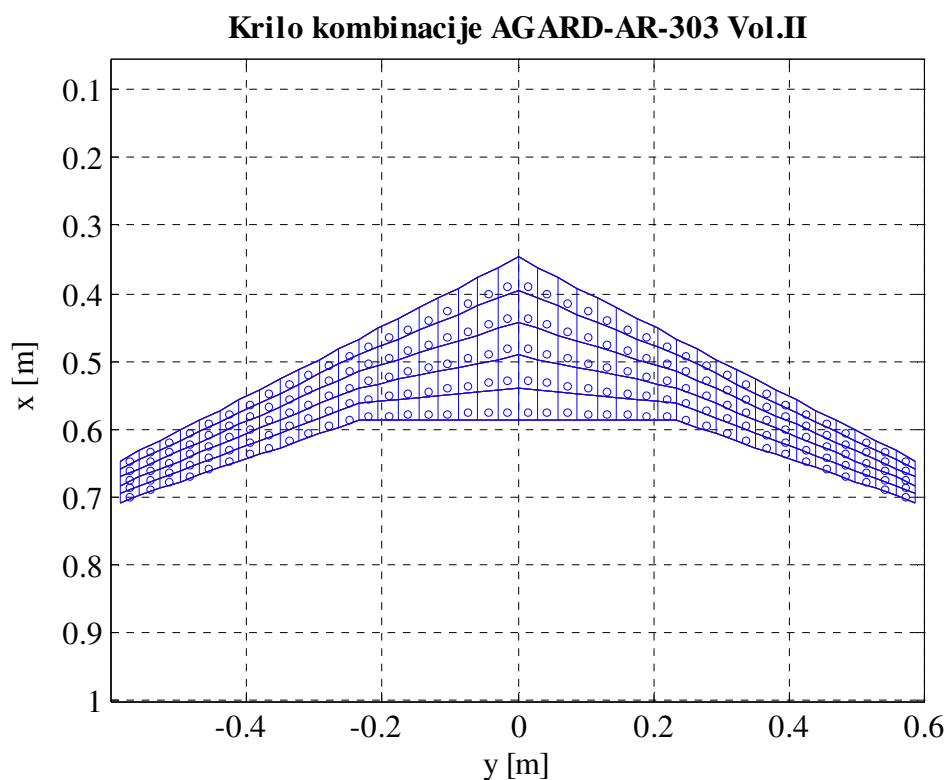
Fvrtlog1	funkcija koja računa čvorove svih $\Pi$ vrtloga na lijevom krilu i kao izlaz daje brzinu poremećaja u kontrolnoj točki od svih vrtloga (na lijevom krilu) jediničnog intenziteta
Fvrtlog2	funkcija koja računa čvorove svih $\Pi$ vrtloga na desnom krilu i kao izlaz daje brzinu poremećaja u kontrolnoj točki od svih vrtloga (na desnom krilu) jediničnog intenziteta
panel	računa površine panela na kojima se određuje $C_p$
pivrtlog	potprogram Fvrtloga1 i Fvrtloga2 koji izračunava brzinu u kontrolnoj točki induciranu jednim vrtlogom jediničnog intenziteta
profil	računa relativnu debljinu i zakrivljenost srednjake aeroprofila LS(1)-0417
TLAKtocke	određuje koordinate točaka u kojima se računa $C_p$ na kombinaciji
winnet1	Izračunava koordinate čvorova lijevog krila, kontrolnih točaka i normale u njima
winnet2	Izračunava koordinate čvorova desnog krila, kontrolnih točaka i normale u njima



**Slika 3-1 Kombinacija tijelo – krilo sa kontrolnim točkama**

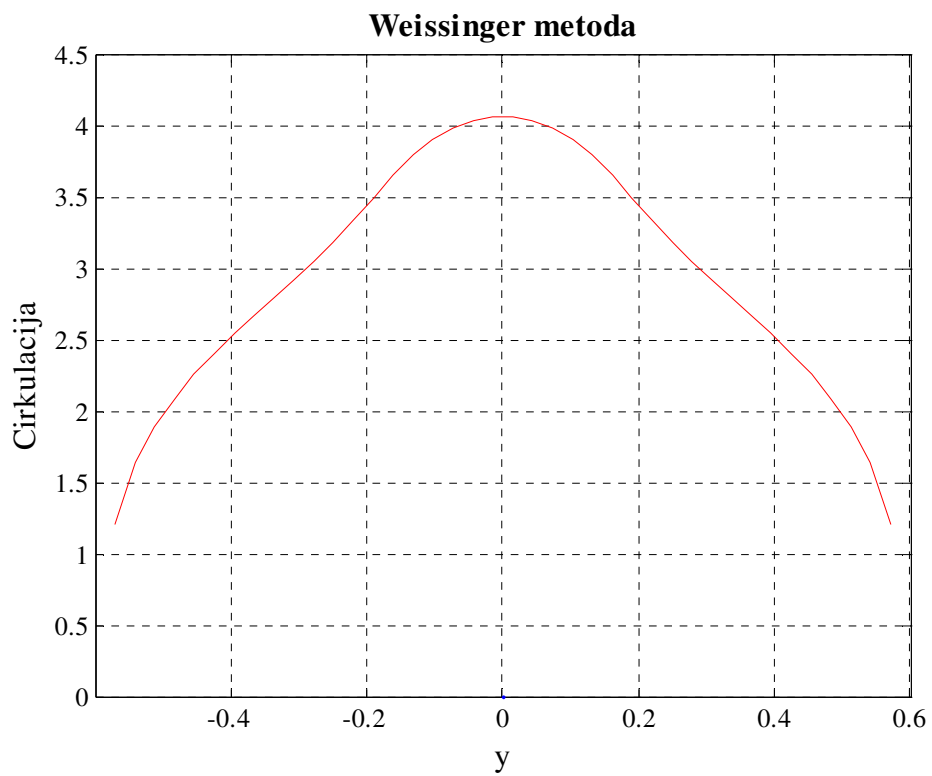
### 3.2 Testiranje programa

Kako bi se rješenja dobivena VID metodom mogla uzeti u obzir, potrebno je metodu testirati na modelu za koji imamo rješenja pomoću nekih drugih metoda. Napravljena su dva testa, za krilo i tijelo kombinacije. Prvi test je određivanje rasporeda cirkulacije na krilo VID metodom i usporedba sa poznatim rješenjem iz Weissinger metode. Drugi test je određivanje rasporeda intenziteta izvora i dipola na osi tijela VID metodom i usporedba rezultata sa rješenjem iz programa *body\_alfa*. Raspored cirkulacije po rasponu krila (sa slike3-1) VID metodom prikazuje slika 3-3 a rješenje dobiveno Weissinger metodom slika 3-2. Test je proveden za iste uvjete strujanja, napadni kut 0.1 rad i brzinu neporemećene struje zraka od 100 m/s.. Sa priloženih slika vidi se da se intenziteti cirkulacija gotovo savršeno podudaraju.

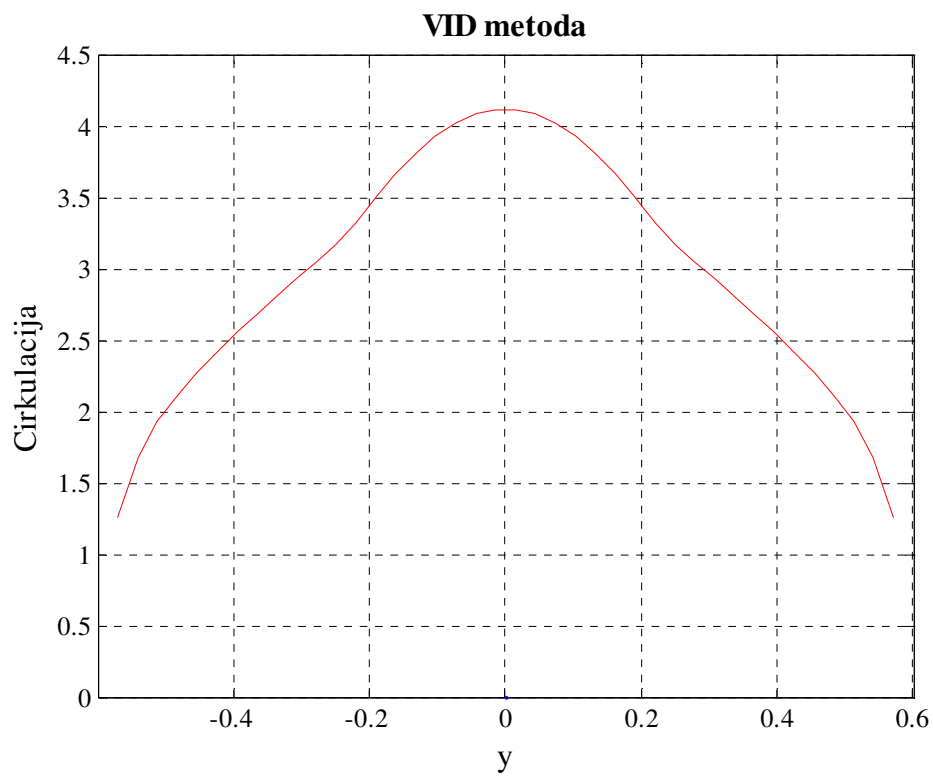


**Slika 3-2 Krilo iz kombinacije tijelo-krilo diskretizirano po rasponu i tetivi**

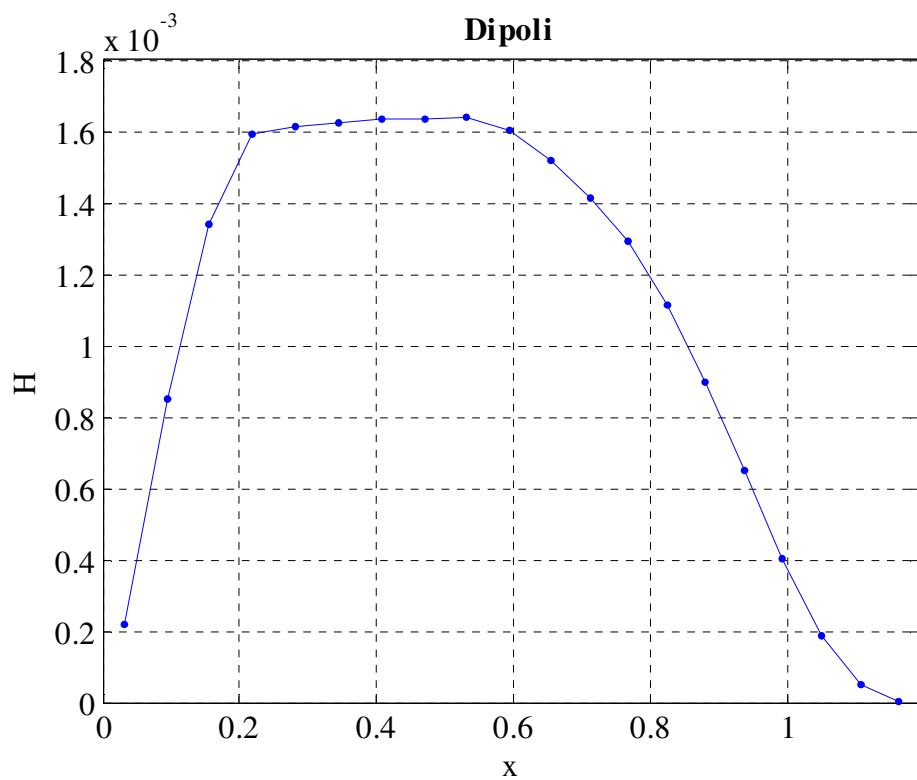
Raspored intenziteta točkastih dipola po osi tijela dobiven VID metodom prikazan je na slici 3-6 a metodom sa predavanja na slici 3-5. Intenziteti izvora prikazani su i uspoređeni na slikama 3-7 i 3-8. Podudarnost je očigledna.



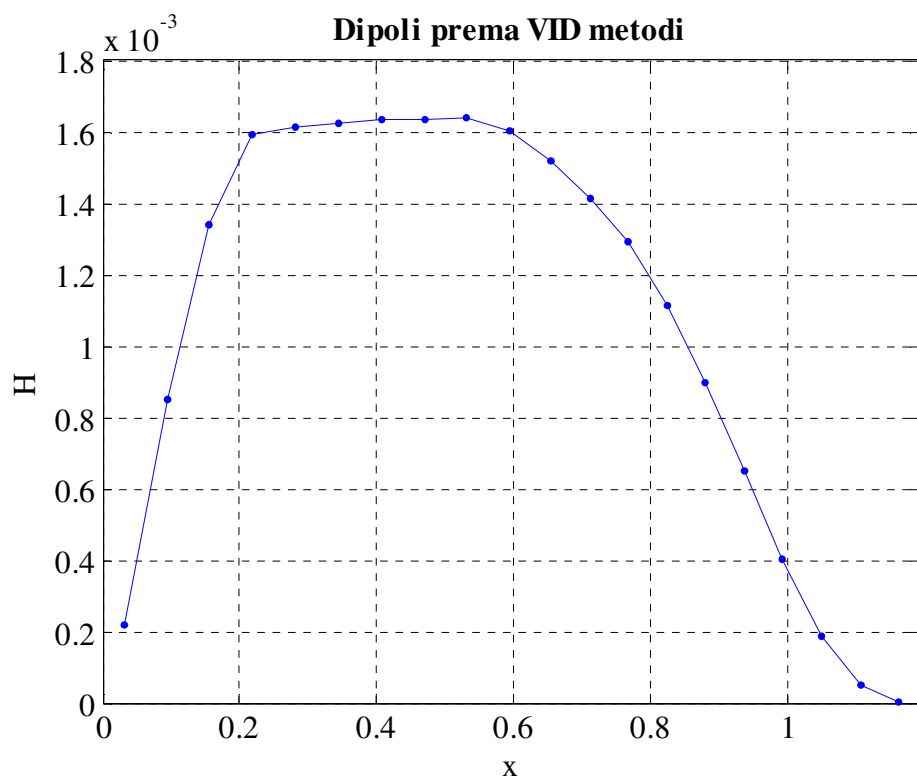
Slika 3-3 Raspored cirkulacije po rasponu krila prema Weissinger metodi



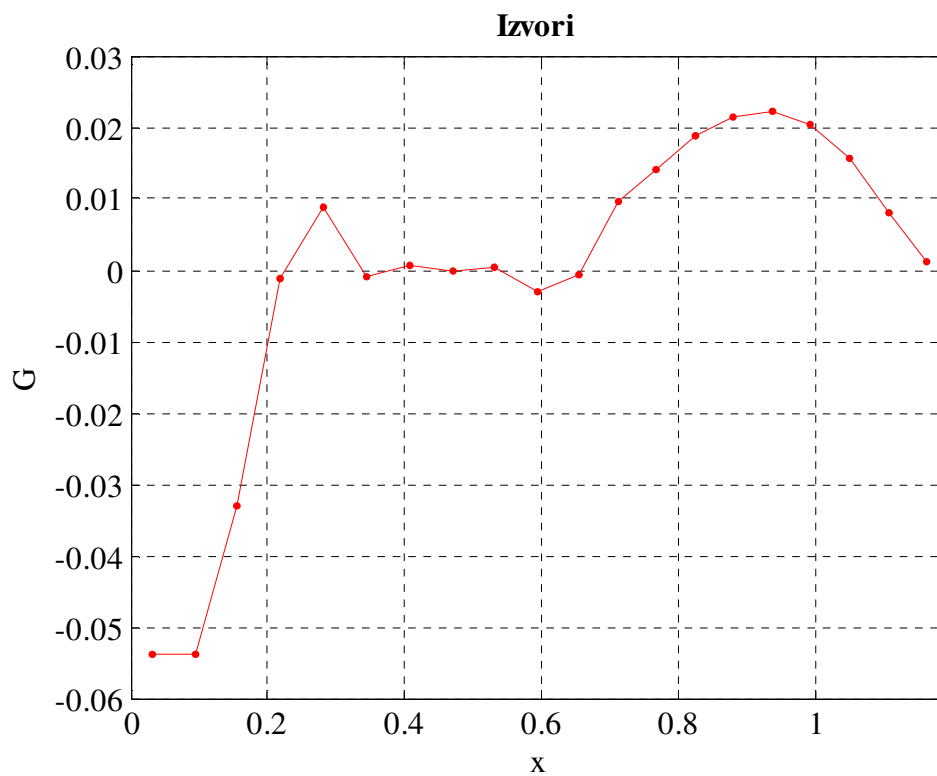
Slika 3-4 Raspored cirkulacije po rasponu krila prema VID metodi



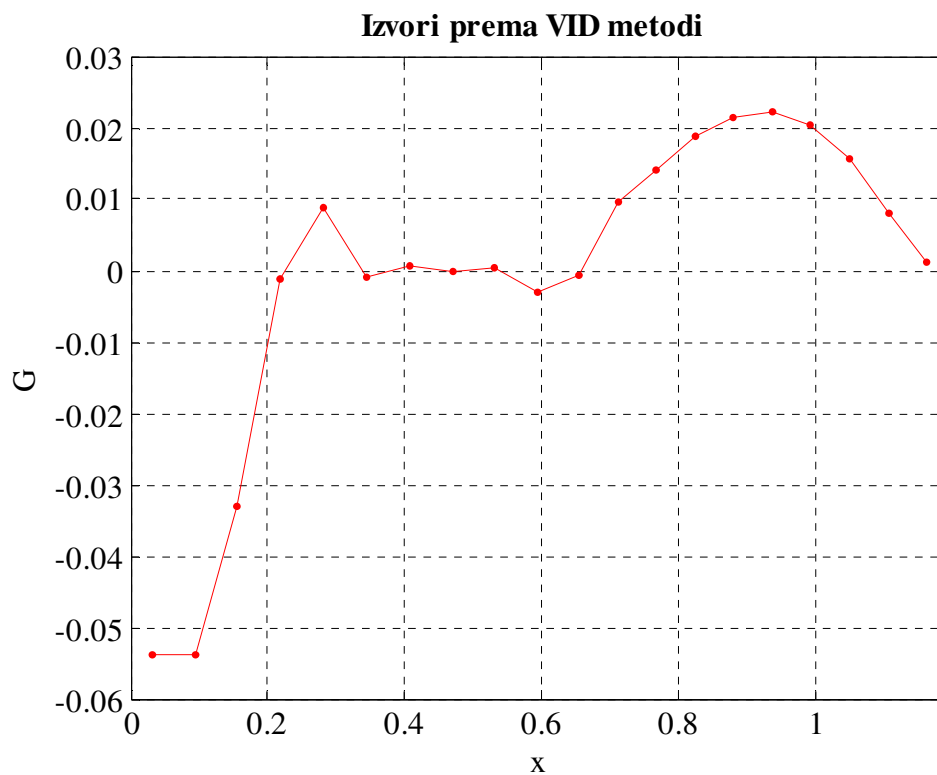
Slika 3-5 Raspored intenziteta dipola po dužini tijela prema body\_alfa.m



Slika 3-6 Raspored intenziteta dipola po dužini tijela prema VID metodi



Slika 3-7 Raspored intenziteta izvora po dužini tijela prema body\_alfa.m



Slika 3-8 Raspored intenziteta izvora po dužini tijela prema VID metodi

## 4. OCJENA METODE

Najbolja ocjena metode definitivno je usporedba dobivenih rezultata sa rezultatima ispitivanja u zračnom tunelu ili sa rezultatima dobivenim CFD metodama na AIAA radionici [2]. Metoda VID daje Eulerov, potencijalni, model strujanja što znači da je zanemarena viskoznost zraka i da rezultati vrijede za vrlo male napadne kutove (manje od 0.1 rad). S obzirom da takav model ne može predvidjeti odvajanje zračne struje, predstavlja tek prvu aerodinamičku iteraciju u problemima određivanja aerodinamičke sile. Zbog tih uvedenih pretpostavki ali i dosta pojednostavljene geometrije kombinacije tijelo-krilo upitno je koliko se odstupanje od rezultata prema članku [2] smatra prihvatljivim. Unatoč silnom trudu i radu, rezultati nažalost nisu davali zadovoljavajuće rješenje. Naprotiv, rješenja su bila daleko od poželjnih. Uzroci takvih rezultata najvjerojatnije su višebrojni i zahtijevaju dodatan rad kako bi se najprije locirali a zatim i riješili.

## 5. ZAKLJUČAK

Metoda VID koja je razvijena za potrebe određivanja normalne sile i momenta propinjanja predstavlja lako razumljivu numeričku metodu ali nažalost ne i tako lako primjenjivu. Brojna pitanja koja su se pojavila tijekom njenog korištenja bila su vrlo poticajna i zahtijevala su dublje proučavanje osnovnih metoda strujanja, njihovih kombinacija i alata za njihovu primjenu. Nažalost, zbog kratkog vremenskog razdoblja u kojem je bilo potrebno riješiti ovaj problem nije bilo moguće otkriti uzroke nefunkcioniranja programa koji podržava VID metodu. Ovaj diplomski rad, stoga, predstavlja tek početak jedne nove metode koja će svoj epilog dobiti nekom drugom prilikom nekom drugom radu.

## LITERATURA

- [1] Janković, S., Aerodinamika I, skripta, Zagreb, 2007.
- [2] Levy, D.W., i ostali, Data Summary from the First AIAA Computational Fluid Dynamics Drag Prediction Workshop, Journal of Aircraft, 2003, Vol.40, No.5, 875-882
- [3] Bertin, J.J., i Smith, M.L., Aerodynamics for Engineers, Prentice-Hall, 2002.
- [4] Philips, W.F., i Snyder, D.O., Modern Adaptation of Prandtl's Classic Lifting-Line Theory, Journal of Aircraft, 2000, Vol.37, No.4, 662-670
- [5] <http://www.nada.kth.se/~chris/pablo/pablo.html>